RPG の世界の形状及び距離の幾何学的考察

林　直輝[a b]

東京工業大学ロボット技術研究会 RPG 王国[a]

東京工業大学ロボット技術研究会数学の科学[b]

Twitter:@nhayashi1994
キーワード:RPG,ゲーム製作,トーラス,
位相幾何学,微分幾何学,曲面論,等長地図
2015/6/30

要旨

ウェブ上で見られる従来の RPG の世界の形状の考察は数学的厳密性に欠けるものが目立つ．特に，RPG の世界がトーラスであるという解釈を支持するものは多くとも，それを数学的に議論したものは少ない．そこで RPG の世界の形状やワールドマップにおける距離を位相幾何学，微分幾何学を用いて考察した．まず，長方形のワールドマップで，マップの上下，左右の端が糊付けされたようにプレイヤーキャラクターが移動するときは，そのようなゲームの世界の形状は 2 次元平坦トーラスであることを，長方形から 2 次元トーラスを構成することで証明する．次に，構成に用いた長方形が構成したトーラスの等長地図であること，すなわちゲーム中でのワールドマップの作成が可能であることを示す．また，RPG を作成する際のワールドマップの大きさを議論する手法を提案する．

1. 序文

ドラゴンクエスト™シリーズ，ファイナルファンタジー™シリーズを初めとする多くの RPG におけるワールドマップは長方形状であるが，マップの上下端および左右端が繋がっているようにプレイヤーキャラクターが移動する．RPG ツクール™や WOLFRPG エディター©といった, RPG 制作ゲームエンジン(ツール)においても，マップ作成の際に同様のループ構造を実装することが可能である．RPG ツクール製の代表的なフリーゲームであるゆめにっき©や.flow©でも，主人公の夢の中の世界ではあるが，先に述べた構造を持つマップが多い．これらのゲームの世界が地球のように楕円体の惑星の上であるとしたら，このような挙動はありえないばかりか，長方形の正確な等長地図は作成できないことが知られている([6][12])．よって上述したようなワールドマップを持つ RPG(以降単に RPG と称す)の世界(以降単に RPG 世界と称す)の形状は球ではないと考えられる．この事実について，いままでに様々な考察がなされてきた．

筆者は 2015 年 3 月 26 日午前 2 時または

それ以前から,「RPG　世界　トーラス」とGoogle検索にかけ，その検索結果おいて比較的上層に出てくるウェブサイトを閲覧した．ワールドマップの繋がり方からトーラスであること，通常のトーラスでは中心曲線の内側と外側でトーラス表面の周の長さが異なるという点を解決するべく平坦トーラスであると結論づけているものがあった．なお, RPG世界の形状がトーラスではなく別の姿であるということを，類体論や体のガロア理論を交え数学的に考察したウェブサイトには[1]が挙げられる．このように,必ずしもトーラスである必要はないが，このウェブサイトでも挙げられているように「標準の答え」としてよく見られる世界の形状がトーラスであるという考察に，数学的な議論を厳密に行ったものは見られなかった．

そこで長方形からトーラスの構成を，位相幾何学的に行った．そのトーラスが円から構成されるトーラスと同位相であることから, RPGの世界が4次元Euclid空間の曲面であると分かった. 4次元であれば平坦トーラスが構成可能で，ゲーム内のワールドマップを基準に距離を保って曲面を構成できる，つまり長方形の等長地図の作成が可能であると考えた．

本稿では, RPG世界が2次元平坦トーラスであるという解釈に，数学的な証明を与える．この証明の中で得られた定量的な事実により, RPG作成の際のワールドマップの大きさを議論することも可能となった．

これ以後の本稿の構成は以下のとおりである:2節で主結果，すなわちRPG世界が2次元トーラスであり，ワールドマップがその世界の等長地図となっていることの証明に必要な事実を紹介・準備する. 3節で主結果を証明する. 4節では等長地図の作成が可能であることから，ワールドマップの大きさを議論する手法を主結果の応用として提案する．

2. 準備

これから話を進めるために必要な事項について，特に重要なものを記述する．教科書の定義定理などの列挙に過ぎず，またこれでも十分ではないことを忠告しておく．後にも述べるが，本稿で説明するには本題以上に紙面を裂かなくてはならない概念については参考文献を参照．参考文献は位相幾何に関しては[10]を，微分幾何に関しては[12]を用いた．

特に断りがない場合，位相はtopologyの意味で用いる．

2.1. 事項(位相幾何学)

Def.2.1.1. 同値関係

集合 X の元の間にある関係~が定義されているものとする．

~が同値関係である

$$\Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \ (1) a \sim a \\ \wedge (2) a \sim b \Rightarrow b \sim a \\ \wedge (3) a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c \\ \text{for } {}^{\forall} a, b, c \in X$$

なお, (1)を反射律, (2)を対称律, (3)を推移律という．

Def.2.1.2. 同値類・代表元

集合 X に同値関係~が与えられており, $a \in X$とする．

集合$\{x \in X \mid a \sim x\}$を$a$の定める同値類といい，$[a]$と書く．$a$を同値類$[a]$の代表元という．

同値類の任意の元は代表元になりうること, 2つの同値類は一致するか全く共通の元を持たないかのいずれかであることが知ら

れている．証明は[10]の８ページを参照．この事実から，集合 X の各元について同値類を作れば，X はこれらの同値類に分割される．これを X の類別という．

Def.2.1.3.　商集合

2.1.2.と同じ仮定をする．同値類を元とする集合を同値関係~による X の商集合といい，X/~と書く．

Axi.2.1.4.　開集合の公理

Λを任意の空でない集合とする．X を空でない集合とし，その部分集合を元とする集合族$\mathcal{O}$が次の条件:

(1)$X \in \mathcal{O}$ かつ$\phi \in \mathcal{O}$

(2)$U_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

(3)$U, U' \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap U' \in \mathcal{O}$

を満たすとき，$\mathcal{O}$は X に位相を定めるといい，$\mathcal{O}$を開集合系，$\mathcal{O}$の元を開集合という．

また，$(X, \mathcal{O})$あるいは単に X を位相空間という．

Def.2.1.5.　連続・連続写像(位相空間)

X, Yを位相空間，$f: X \to Y$を写像とする．

fが$x \in X$で連続である

$$\Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} f(x)\text{の近傍}N \subset Y\text{に対し}$$

$f^{-1}(N) \subset X$がxの近傍となる

特に X の各点でfが連続なとき，fを連続写像という．

この定義は自然な位相をいれた Euclid 空間において，Euclid 空間での函数の(各点)連続性の定義になっている．逆に言うと，抽象的な位相空間に Euclid 空間での函数の連続性を拡張したものとなっている(むしろ抽象的な位相を考える意味は函数の連続性の概念の拡張のためともいえる)．実際 Euclid 空間における ε 開球は開集合の公理を満たす．

Def.2.1.6.　同位相

連続かつ全単射な写像で，逆写像も連続であるものを同位相写像という．二つの位相空間に対して，一方から他方への同位相写像が存在するとき，それらの位相空間は同位相あるいは単に同相であるという．

位相幾何学では同相な図形の間の不変な性質を扱う．すなわち互いに同相な図形は同一視される．

Def.2.1.7.　球面・トーラス

$n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$とする．集合

$$S^n = \left\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\right\}$$

をn次元球面という．また，

$$T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \ (n\ copies\ of\ S^1)$$

をn次元トーラスという．すなわち１次元球面の有限個の直積がトーラスである．

主結果の証明でも述べるが，他の円どうしの直積によるトーラスも，相似拡大という同相写像により位相的図形として同一視できる．一方で相似拡大により距離は変わるため，本稿では等長地図の議論のためにしばしば半径 1 ではない円の直積のこともトーラスと呼ぶことがある．

Def.2.1.8.　商空間

$(X, \mathcal{O})$を位相空間，$f: X \to Y$を集合Xから集合Yへの全射とする．Yの部分集合族$\mathcal{O}'$を

$$\mathcal{O}' := \{U \in 2^Y | f^{-1}(U) \in X\}$$

とすると，$\mathcal{O}'$は開集合系つまり位相となる．これをfによる商位相といい，位相空間$(Y, \mathcal{O}')$をfにより定まる$(X, \mathcal{O})$の商空間という．

これが well-defined である証明つまりこの定義による部分集合族が開集合の公理を満たすことの証明は[10]の p29 を参照．

2.2. 事項(微分幾何学)

Def.2.2.1. 曲線のパラメータ表示

Iを実数の区間とする．I上で定義された関数$x\colon I\to\mathbb{R}, y\colon I\to\mathbb{R}$に対し

$$\{(u(t),v(t))\in\mathbb{R}^2 \mid t\in I\}$$

を平面曲線という．空間曲線も同様に

$$\{(u(t),v(t),w(t))\in\mathbb{R}^3 \mid t\in I\}$$

と表示される．ただし$w\colon I\to\mathbb{R}$とする．特にu,v,wが滑らか(無限回連続微分可能)であるとき，滑らかな曲線という．

曲線上の点を$\gamma(t)=(u(t),v(t))$と表示することを曲線のパラメータ表示という．空間曲線も同様.

以下$\gamma(t)=(u(t),v(t))$で曲線を表す.

Thm.2.2.2. 曲線の弧長公式

$I=[a,b]$とする．少なくとも 1 回連続微分可能な曲線$\gamma(t)=(x(t),y(t))$の弧長は次で表される:

$$\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

厳密な証明にはまず厳密な弧長の定義が必要である．詳細は[4]を参照．この公式において，弧長は曲線にのみ依存しパラメータ表示に依存しないことが積分の変数変換により証明できる．

なお空間曲線も同様の公式が成立する．一般に Euclid 空間内の少なくとも 1 回連続微分可能な曲線$\{\gamma(t) \mid a\le t\le b\}$の弧長は

$$\int_a^b\left\|\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right\|\mathrm{d}t$$

で与えられる．

Def.2.2.3. 曲面のパラメータ表示

$D\subset\Omega\subset\mathbb{R}^2$を弧状連結集合とする．$\Omega$上で定義された関数$x\colon\Omega\to\mathbb{R}, y\colon\Omega\to\mathbb{R}, z\colon\Omega\to\mathbb{R}$に対して

$$\{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in\mathbb{R}^3 \mid (u,v)\in D\}$$

を曲面という．

曲線上の点を

$$\pi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

と表示することを曲線のパラメータ表示という．特にx,y,zが滑らか(無限回連続微分可能)かつπ_u,π_vが線型独立であるとき，滑らかな曲面という．

曲線同様，以下

$$\pi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

により曲面を表す.

Def.2.2.4. 曲面上の空間曲線

γ,πを上で与えた平面曲線，曲面とする．このとき，

$$\pi\circ\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

は曲面π上の曲線を表す.

Def.2.2.5. トーラスの大円・小円

C,Sを円とする． ただしSの半径の方が大きいものとする． トーラス$T=C\times S$において，Cを小円，Sを大円という．

2.3. 補助定理

Lem.2.3.1.

2 次元トーラスT^2を 4 次元 Euclid 空間の部分集合とみなすと，その曲面の広い意味(4 次元空間の曲面)のパラメータ表示の一つは次で与えられる:

$$\pi(s,t)=(\cos s,\sin s,\cos t,\sin t)$$
$$\text{for }(s,t)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$$

1 次元球面を三角関数で表示すれば明らかであろう．

パラメータが一般の長方形を動き，特にトーラスの小円周と大円周が長方形の縦横の長さに等しい場合では次のように三角関数の周期と振幅を変更することで広い意味のパラメータ表示を得る:

$$\pi(s,t)=\frac{1}{2\pi}\Big(a\cos\frac{2\pi s}{a},a\sin\frac{2\pi s}{a},$$
$$b\cos\frac{2\pi t}{b},b\sin\frac{2\pi t}{b}\Big)$$

$$\text{for } (s,t) \in [0,a] \times [0,b]$$

Lem.2.3.2.

位相空間X, Y間の連続写像$f: X \to Y$を考える．fは全射で$Y = X/\sim$にはfによる商位相が入っているものとする．更に位相空間Zと写像$g: X \to Z, h: Y \to Z$があって

$$g = h \circ f$$

が成立するとする．このときgが連続であることとhが連続であることは同値である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright" near start] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Proof

hが連続であるとする．fが連続なので明らかにgは連続である．

gが連続であるとする．Zの開部分集合U_Zを任意に取り固定する．

$$g^{-1}(U_Z) = (h \circ f)^{-1}(U_Z) = f^{-1} \circ h^{-1}(U_Z)$$

であり，gが連続であるため$f^{-1} \circ h^{-1}(U_Z)$はXの開部分集合である．

ここで，Yにはfによる商位相が入っているので$h^{-1}(U_Z) = U_Y$とすると，

$$f^{-1}(U_Y) = f^{-1} \circ h^{-1}(U_Z) = g^{-1}(U_Z)$$

であるので$f^{-1}(U_Y)$はXの開部分集合である．更にfは連続であるので$h^{-1}(U_Z)$はYの開部分集合となる．従ってhは連続である．

Q.E.D.

Lem.2.3.3.

写像$f: (X, O) \to (Y, O')$を連続とする．UをXのコンパクト集合とすると$f(U)$はYのコンパクト集合である．

Lem.2.3.4.

コンパクト位相空間Xと Hausdorff 位相空間Yとの間の写像$f: X \to Y$が連続全単射であるとする．fは同相写像となる．

Hausdorff 性，コンパクトの定義は長くなるため割愛する．厳密性を多少犠牲に簡単に言うと，Hausdorff 空間は空間内の点を分けることができる位相空間で，コンパクト集合は Euclid 空間の有界閉集合に相当する位相空間の部分集合である．これらの定義やこれらの補題の証明は[11]を参照．

3. 主結果と証明

Claim1

$\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(a,0), \mathrm{C}(a,b), \mathrm{D}(0,b)$を頂点とする，平面内の長方形 ABCD を$R$とする．つまり

$$R := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le u \le a \,, 0 \le v \le b\}$$

とする．ここにおいて関係$\sim$を次で定める:

$$(u,v) \sim (u,v), (u,0) \sim (u,b), (u,b) \sim (u,0),$$
$$(0,v) \sim (a,v), (a,v) \sim (0,v)$$

このとき$\sim$は同値関係となり，この同値関係で点を同一視した商集合$R/\sim\, = T'$は 2 次元トーラスと同相である．

然らば，ワールドマップに相当するT'は 2 次元トーラスとみなすことができる．

Proof

$\sim$が同値関係となることは定義より自明である．任意の$0 < u, v < 1$を固定する． このとき， 関係$\sim$による同値類は

$$[(u,v)] = \{(u,v)\}$$
$$[(u,0)] = \{(u,0), (u,b)\}$$
$$[(0,v)] = \{(0,v), (a,v)\}$$
$$[(0,0)] = \{(0,0), (a,0), (0,b), (a,b)\}$$

である．

よって

$$T' = \{[(u,v)], [(u,0)], [0,v], [(0,0)]\}$$

はRにおいて

$$(u,0), (u,b)$$

どうしや

$$(0,v), (a,v)$$

どうし及び, 4 点 A,B,C,D つまり

$$(0,0),(a,0),(0,b),(a,b)$$

をそれぞれ同一視したものである.

(Remark: これは直感的には長方形 ABCD の辺 AB と辺 DC を張り合わせて円柱を作り, その後その円柱をねじらずに貼り合わせたことに相当する. 商集合の構成を以て貼り合わせるという情緒的な操作を数学的に議論できるようになる.)

次にT'に位相を導入し位相空間(商空間)を構成する. 位相を入れることで位相的図形とみなすことができる. 写像$p: R \to T'$を

$$p\big((x,y)\big) = [(x,y)]$$

で定義する. このとき集合$U \subset T'$に対し$p^{-1}(U) \subset R$が開集合(長方形は Euclid 平面の部分空間なのでその部分空間としての位相を考える, つまり近傍である)となるときに限りUをT'の開集合と定義する. この開集合系によりT'は位相空間となる.

位相空間T'が 2 次元トーラスと同相であることを示す. この後 Claim2 で等長地図の議論を行うため, $T^2 = S^1 \times S^1$ではなく Lem.2.3.1.後半で与えたパラメータ表示のトーラス(Tとする)との同相性を証明する. なお, 相似拡大(定数倍)は明らかに同相写像なため, T^2とも同相になる. Lem.2.3.2.より長方形からトーラスへの写像が連続であることを示せば, 商位相を与える写像は明らかに連続なので長方形の商空間からトーラスへの写像は連続となる. さらに長方形の商空間からトーラスへの写像が全単射であることを示せば Lem.2.3.4.によりその写像が同相である. 長方形は 2 次元 Euclid 空間の有界閉集合であるから Heine・Borel の被覆定理([11])によりコンパクト集合で, その商空間は Lem2.3.3.よりコンパクトである. トーラスは 4 次元 Euclid 空間の部分空間なので明らかに Hausdorff 空間であるため従う.

写像$\pi: R \to T$を Lem.2.3.1.後半のそれとすると三角関数は連続であるので明らかに連続である. 故に写像

$$f: T' \to T$$
$$f([(u,v)]) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(a\cos\frac{2\pi u}{a}, a\sin\frac{2\pi u}{a}, b\cos\frac{2\pi v}{b}, b\sin\frac{2\pi v}{b}\right)$$

も連続である. また, かつ全単射である. ∵連続性は Lem2.3.2.による. 長方形の内部においてπは全単射だが周囲では頂点など, トーラス中で重なる点が生じるため単射性はない. しかし頂点を一つの元に同一視するなどしてあるT'ではこのような問題は生じない.

よってf は連続全単射であるから Lem.2.3.3.より同相である.

以上より, Claim1 が証明された.

Q.E.D.

Claim1 の結果を RPG の観点で記述すると次のことが考えられる.

マップエディタに描かれたワールドマップの横の長さをa,縦の長さをbとするとき, ワールドマップが長方形Rである. 実際のゲーム画面では商空間T'の上をキャラクターが動き, イベントが進行する. マップを読み込みゲーム画面とする写像が

$$p: R \to R/\!\sim\, = T'$$
$$p\big((x,y)\big) = [(x,y)]$$

である. 離散的に扱う計算機内部での実際の処理はさておき, 数学的にはゲーム画面にマップの上下と左右が繋がるように呼び出すという処理は, マップエディタで描いた長方形の商空間を構成していることになる.

本稿のテーマはその商空間の形状であるが, 上の時点ではゲーム画面として可視化

されていても，ワールドマップを世界地図とする世界全体の姿は確認できない．そこで写像

$$f: T' \to T$$
$$f([(u,v)]) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(a\cos\frac{2\pi u}{a}, a\sin\frac{2\pi u}{a}, b\cos\frac{2\pi v}{b}, b\sin\frac{2\pi v}{b}\right)$$

の出番である．この写像が同相写像であることから，$T' \cong T$が導かれる．すなわち，ゲーム画面に表れている世界は写像

$$\pi: R \to T$$
$$\pi(u,v) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(a\cos\frac{2\pi u}{a}, a\sin\frac{2\pi u}{a}, b\cos\frac{2\pi v}{b}, b\sin\frac{2\pi v}{b}\right)$$

により定まる2次元トーラスと同相である．よって RPG 世界の形状は位相幾何学的に2次元トーラスである．

位相幾何学の観点から RPG の世界の形状を説明することができた．しかし位相幾何学の考え方では相似拡大による他の 2 次元トーラスとも同相であるため，距離の議論が困難である．本稿では世界の形状だけでなく，ゲーム画面上での距離とキャラクターが住む世界での距離の関係も考察する．

ここに，以下を主張する．

Claim2

集合RとT及び写像πを Claim1 及びその証明で用いたものと同様とする．それぞれを Euclid 空間の部分集合として Euclid 距離をいれ，距離空間とする．このとき，RはTの等長地図となる．

然らば，RPG の世界の等長地図がその RPG のワールドマップであることがわかる．

(Remark:ここで地図というのは日常語であり，多様体論における局所座標のことではない．Rは閉集合であるため(R,π)は多様体論における地図(chart)とはならない．

一方，ここではトーラスに自然に距離を定めているが，4 次元空間を考えるため 3 次元までの曲面論の知識を用いることができるかについてはギャップが生じる．厳密にはトーラスを 2 次元多様体と見て――このとき先ほどの長方形の内部にだけ注目したものなどを局所座標とする(他の chart の取り方も可能)――さらに Riemann 計量を入れることで多様体に距離を定めることになるが，その結果本稿のように Euclid 距離で議論できることが知られている．一般に次の定理が成り立つ：

“連結な Riemann 多様体(M,g)上に，多様体上の 2 点を結ぶ滑らかな曲線の弧長の下限という 2 変数関数d，すなわち

$$d: M \times M \to \mathbb{R}$$
$$d(x,y) = \inf\{x,y\text{間の滑らかな曲線の弧長}\}$$

を用意すると，これは距離の公理を満たしかつその距離による位相と元の多様体の位相は一致する”

“コンパクト n 次元多様体は 2n 次元 Euclid 空間に埋め込むことができる(Whitney)”

“Riemann 多様体はある Euclid 空間に等長的に埋め込むことができる(Nash)”

Riemann 多様体については[5][8]を，弧の存在と弧長の定義も含めた 1 番目の定理の証明は[5]を参照．埋め込みの定義を含めた 2 番目の定理については[7],3 番目の定理は[2]とその参考文献を参照．これらの定理により，本稿の議論は安全なものであると言える)

Proof

長方形R上の任意の区分的に滑らかな曲線Cを固定する． この曲線をRからトーラスT上に写像πで写した時， 曲線の弧長が保たれることを示せばよい． つまりCの長

さと$\pi(C)$の長さが等しいことを示す．

$$C: \gamma(t) = \left(u(t), v(t)\right)\ [\alpha \leq t \leq \beta]$$

であるとする．このとき，その弧長Lは

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\, \mathrm{d}t$$

である．また$\pi(C)$は

$$\pi(C): \pi \circ \gamma(t) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(a \cos\frac{2\pi u}{a}, a \sin\frac{2\pi u}{a}, b \cos\frac{2\pi v}{b}, b \sin\frac{2\pi v}{b}\right)$$

$$u = u(t), v = v(t)\ [\alpha \leq t \leq \beta]$$

さて，$\pi(C)$の弧長を計算する．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi \circ \gamma(t) =$$

$$\left(-\dot{u}\sin\frac{2\pi u}{a}, \dot{u}\cos\frac{2\pi u}{a}, -\dot{v}\sin\frac{2\pi v}{b}, \dot{v}\cos\frac{2\pi v}{b}\right)$$

$$\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

であるから，弧長L_{π}は

$$L_{\pi} =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(-\dot{u}\sin\frac{2\pi u}{a}\right)^2 + \left(\dot{u}\cos\frac{2\pi u}{a}\right)^2 + \left(-\dot{v}\sin\frac{2\pi v}{b}\right)^2 + \left(\dot{v}\cos\frac{2\pi v}{b}\right)^2}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{u}^2\left(\sin\frac{2\pi u}{a}\right)^2 + \dot{u}^2\left(\cos\frac{2\pi u}{a}\right)^2 + \dot{v}^2\left(\sin\frac{2\pi v}{b}\right)^2 + \dot{v}^2\left(\cos\frac{2\pi v}{b}\right)^2}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{u}^2\left(\sin^2\frac{2\pi u}{a} + \cos^2\frac{2\pi u}{a}\right) + \dot{v}^2\left(\sin^2\frac{2\pi v}{b} + \cos^2\frac{2\pi v}{b}\right)}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\, \mathrm{d}t = L$$

$$\therefore\ L_{\pi} = L$$

Q.E.D.

Claim2 の結果について，RPG の観点から考察する．

キャラクターがゲーム画面内で区分的なめらかに動くとき，その移動した道のりの長さがその RPG 世界においてのキャラクターの移動した道則の長さと等しくなければならない．何故ならば，プレイヤーの視点からすれば，長方形のワールドマップがすなわちキャラクターのいる世界であるからである．プレイヤーがキャラクターを動かしただけ，キャラクターは RPG 世界を動かなくてはならない．Claim2 により，これが保障されるといえる．なお，区分的滑らかでない，つまり至るところ微分不可能な軌跡(Brown 運動など)を描いてキャラクターが動く場合については，そもそも弧長が定まるかについての議論が必要となるため，ここでは省略する．実際のゲーム上でもそのような動きはあくまで疑似的にしかできない(それを言えばそもそも連続に移動していないのだが).

以上をまとめると次のようになる:

・Claim1:RPG 世界の形状はマップのつながれ方に着目すると 2 次元トーラス

・RPG 世界ではワールドマップ上の移動距離は実際の世界の上での移動距離に等しくなければならない

・Claim2:4 次元空間内の曲面として見た 2 次元トーラスπはそれを実現する

・以上により RPG 世界は上述のπで表される曲面である

なお, 3 次元空間のトーラスでは，弧長を保つことが不可能である．詳細は[12]にある通り，第一基本形式が等長地図の作製のための条件を満たしていないことによる．直感的にも 3 次元空間内で長方形を糊付けしてトーラスにするためには長方形を引き伸ばさなくてはならないことからもわかる．

4. 主結果の応用

主結果により, RPG 世界の形状が 4 次元

空間に埋め込まれた 2 次元トーラスπであるということがわかった．これにより，ただの長方形ないしは商空間であった RPG 世界の表面積を考えることができる．地球の表面積を比較することで，どれだけの広さのワールドマップが得られるかを比較検討する手法を提案する．

RPG 世界πの表面積Aは，長方形貼り付けて構成(Claim1)し，かつ引き伸ばしはなく距離は保たれている(Claim2)ことから

$$A = ab$$

である．また地球の表面積A_Eは

$$A_E = 5.100\,656 \times 10^8 [\mathrm{km}^2]$$

とわかっている([9])．

$$A = A_E$$

となるようなa, bが地球と同じ表面積のトーラスを構成する．

ある正の定数kが存在して

$$b = ka$$

であるものとする．すなわち長方形の辺の比をkとする．このとき，

$$A = ka^2$$

であるので$A = A_E$により

$$a = \sqrt{\frac{A_E}{k}}$$

さて，長方形の辺の比をアスペクト比 4:3 に合わせているものとすると，

$$k = \frac{3}{4} = 0.75$$

であってこのとき，

$$a \sim 2.60785 \times 10^4 [\mathrm{km}]$$

が得られる．ワールドマップにおけるピクセルと㎞の対応を考えれば，ワールドマップの縦の長さが計算できる．また，他の惑星並の大きさを想定してワールドマップを作成する場合も上と同様の手法が使える．また逆に，勝手に作ったワールドマップから世界の大きさを地球と定量的に比較することもできる．ピクセルと㎞の対応付けは，ゲーム製作者の解釈にもよる．以下にその具体例を示す．

32 ピクセル四方のマスに描いた城を基準に縮尺を考えるとする．更にこの城の東西の長さがプラハ城のそれに等しいものとする．プラハ城の東西の長さは 430m([3])なので，

$$32 \text{ pix} = 430 \text{ m}$$

の対応を得る．1 マスが 16 ピクセル四方であるとして

$$1 \text{ マス} \sim 210\text{m}$$

となる．従って

$$a \sim 2.60785 \times 10^7 [\mathrm{m}]$$

と見ると，ワールドマップの横のマス数は

$$\frac{2.60785 \times 10^7}{210} \sim 1.24 \times 10^5$$

となる．これは余りにも大きすぎて実際の描画の手間や処理速度，キャラの移動時間とプレイ時間の観点から実用的ではない．また明らかに 16×20 ピクセルのキャラクターの身長 170cm を基準にするとより大きすぎるマス数が必要となる．RPG のマップにおけるキャラクターや都市はあくまでもそこに何があるかを示すアイコンであって，巨人が冒険しているわけではないと考えるのが妥当である．実際上述のキャラクターや建造物に合わせたスケールでワールドマップを描くと，世界を旅するのに移動だけで相当な時間がかかってしまうことになり，ゲームとして実用的ではない．そこで他のスケールを用いる必要がある．

ワールドマップは世界地図であるから，世界地図スケールでも確認できるレベルの大きな地形を基準とする．ここでは東西の長さ 4800 ㎞のサハラ砂漠を用いて考える．RPG 世界にサハラ砂漠をモデルとした巨

大な砂漠があり，その横方向の長さが16マス(256 ピクセル)であるとすると，

$$16\text{マス}\sim 4800\text{km}$$

すなわち

$$1\text{マス}\sim 300\text{km}$$

の対応が得られる．よって，このときのワールドマップの横のマス数は

$$\frac{2.60785\times 10^4}{300}=86.9\dots\dots\sim 87$$

より87マスであるとわかる．従っておよそ87×65平方マスすなわち1392×1040平方ピクセルの長方形がワールドマップとして，地球の広さを実現するという意味で適切な大きさとなる．キャラクターを常に16×20平方ピクセル表示するとなると少々狭すぎるかもしれないが，これは製作者の解釈や製作する RPG に依る．1 マス~100 ㎞の対応であれば，$a\sim 2.60785\times 10^4$[km]より横のマス数が 261 マスとなるが，これを良いと判断するかどうかは製作者の解釈や，どのような RPG を作るかに依存する．このように，ワールドマップのマス数の調整に関しては定量的な議論が困難であるため本稿の議論はここまでとする．

以上をまとめ, RPG 世界の大きさに関する次の手法を提案する：

① モデルとする惑星 P の表面積と RPG 世界の表面積が等しいものとし, RPG 世界をメートル法で計量する
② 地形の大きさを元にピクセルとメートルの対応を求め, RPG 世界が P の広さを実現するためのワールドマップの辺の長さをピクセルで求める
③ 計算結果がゲームとして「良い」かどうかを議論する(この段階は製作者の解釈やどのような RPG を製作するかに依存)

参考文献

[1] “ドラクエと類体論.” 再帰の反復. 2013 年 3 月 16 日. http://d.hatena.ne.jp/lemniscus/20130316/1363455905 [アクセス日: 2015 年 6 月 24 日].

[2] “ナッシュの埋め込み定理.” Wikipedia. 2015 年 6 月 17 日. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8A%E3%83%83%E3%82%B7%E3%83%A5%E3%81%AE%E5%9F%8B%E3%82%81%E8%BE%BC%E3%81%BF%E5%AE%9A%E7%90%86 [アクセス日: 2015 年 6 月 24 日].

[3] “プラハ城.” Wikipedia. 2015 年 4 月 11 日. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%97%E3%83%A9%E3%83%8F%E5%9F%8E [アクセス日: 2015 年 6 月 25 日].

[4] 高木貞治. 定本解析概論. 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5: 岩波書店, 2013.

[5] 山田光太郎. 幾何学特論第四講義資料 4. 東京工業大学, 2011 年 11 月 1 日.

[6] 西川青季. 等長地図はなぜできない. 東京都豊島区南大塚 3-12-4: 日本評論社, 2014.

[7] 足立正久. 埋め込みとはめ込み. 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5: 岩波書店, 1984.

[8] 村上信吾. 多様体. 東京都文京区小日向 4 丁目 6 番 19 号: 共立出版株式会社, 2012.

[9] “地球.” Wikipedia. 2015 年 6 月 7 日. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%B0%E7%90%83 [アクセス日: 2015 年 6 月 25 日].

[10] 田村一郎. トポロジー. 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5: 岩波書店, 1983.

[11] 内田伏一. 集合と位相. 東京都千代田区四番町 8 番地: 裳華房, 2003.

[12] 梅原雅顕, , 山田光太郎. 曲線と曲面——微分幾何的アプローチ——. 裳華房, 2013.